INSTRUCCIONES:

- El aspirante deberá seleccionar dos problemas de los tres propuestos.
- Resolver cada problema en hojas separadas por una sola cara
- Escribir el nombre en cada una de ellas.

MECÁNICA CLÁSICA

1. Se dispara horizontalmente una bala de masa *m* contra un bloque de madera de masa *M* suspendido por un cable; véase la Figura 1. La bala queda incrustada en el bloque.
   Calcule la velocidad v de la bala si el impacto hace que el bloque se eleve una altura h sobre su nivel inicial. El péndulo balístico está situado en un campo gravitacional constante.

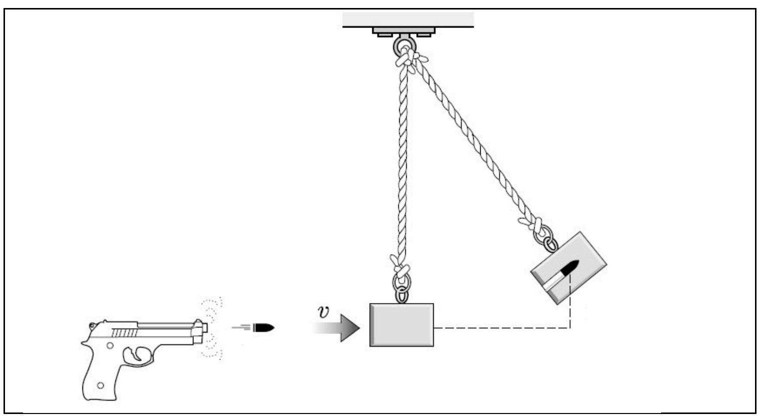


Figura 1.

2. En la Figura 2 se muestra un péndulo simple, de longitud l y con una masa m es su extremo, en un campo gravitacional constante $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{z}}$. La dirección vertical es el eje Z y g la aceleración de la gravedad. El péndulo está restringido a moverse en un plano. Asuma que la masa del cordón es despreciable en relación a m, al igual que los efectos del aire en su movimiento.

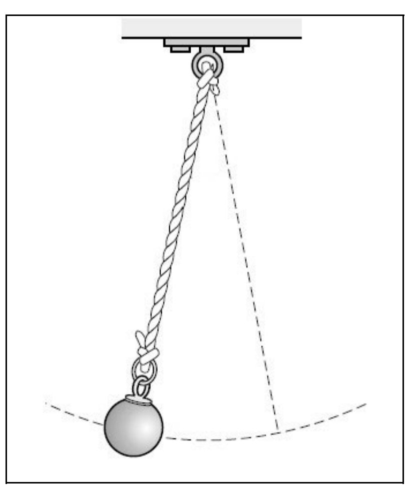


Figura 2

a. ¿Cuántos grados de libertad tienen el péndulo simple? Escriba el Lagrangiano (L) del sistema y encuentre las ecuaciones de movimiento para cada una de las coordenadas generalizadas del mismo.
b. Escriba las ecuaciones encontradas, y su solución general, cuando se consideran oscilaciones pequeñas.
c. A partir del Lagrangiano, encuentre el Hamiltoniano (H) del sistema y escriba las ecuaciones de Hamilton del mismo en la aproximación de oscilaciones pequeñas.
d. A partir de la forma del Lagrangiano encontrado, ¿qué cantidades se conservan en el sistema tratado?

3. Considere la interacción gravitacional entre el Sol y la Tierra, cuyas masas son M y m respectivamente (Figura 3).

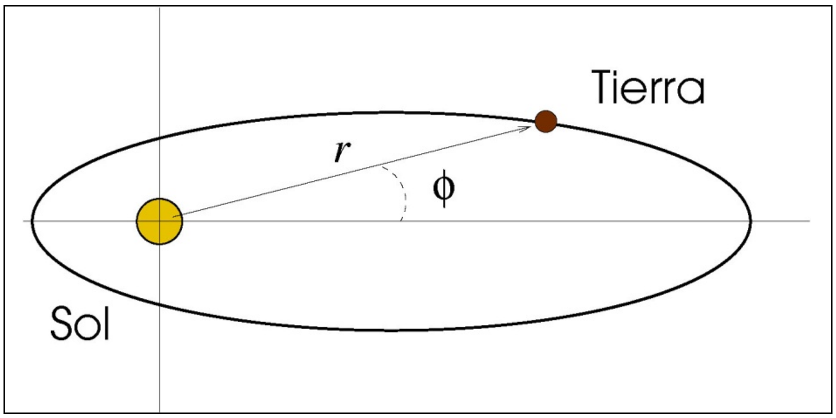


Figura 3

a. Establezca en forma vectorial la forma de la fuerza de interacción entre el Sol y la Tierra.
b. Demuestre que el vector de momento angular ($\mathbf{L}$) es una constante de movimiento en este problema.Enuncie la relación del resultado obtenido con la 2ª. Ley de Kepler.
c. Argumente, sea formalmente o mediante un análisis dimensional, la forma que adopta la 3era. Ley de Kepler.
d. Argumente de que manera las leyes de Kepler son una consecuencia directa de las leyes de Newton.

INSTRUCCIONES:

- El aspirante deberá seleccionar dos problemas de los tres propuestos.
- Resolver cada problema en hojas separadas por una sola cara
- Escribir el nombre en cada una de ellas.

TERMODINÁMICA Y MECÁNICA ESTADÍSTICA

1. Esplique en qué consiste el principio de equipartición de la energía y utilícelo para derivar una expresión para la energía interna de un gas ideal diatómico.

2. Se propone modelar el gas en la atmósfera de un planeta cercano suponiendo que las partículas obedecen una distribución de Maxwell-Boltzmann con una energía potencial debido a una fuerza de gravedad uniforme (independiente de la altura).
   a. Para este modelo calcule cual sería la distribución espacial de partículas (el número de partículas como función de la altura) suponiendo que estas no interactúan entre si y que la temperatura es también independiente de la altura.
   b. En base a este modelo se ha argumentado que las partículas más masivas se encuentran más concentradas cerca de la superficie que las menos masivas. ¿Es esto correcto? Argumente.

3. Suponga que la atmósfera de un planeta tiene una estructura adiabática. Considerando que se encuentra en equilibrio hidrostático y que es un gas ideal, demuestre que la temperatura disminuye linealmente con la altura.

INSTRUCCIONES:

- El aspirante deberá seleccionar dos problemas de los tres propuestos.
- Resolver cada problema en hojas separadas por una sola cara
- Escribir el nombre en cada una de ellas.

ELECTROMAGNETISMO

1. El comportamiento de los campos electromagnéticos y las corrientes eléctricas está regido por la combinación de las ecuaciones de Maxwell y la de la fuerza de Lorentz.

   a. Escriba las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial; utilice el sistema de unidades que prefiera. Indique el significado de cada término. Asimismo, escriba la fuerza de Lorentz a la que está sujeta una partícula de carga q dentro de campos eléctricos **E** y magnéticos **B**.

   b. Utilizando la ley de Gauss calcule el campo eléctrico dentro y fuera de una esfera, de radio R, cargada uniformemente con densidad de carga volumétrica ρ; véase la Fig.1 La carga total de la esfera es Q.

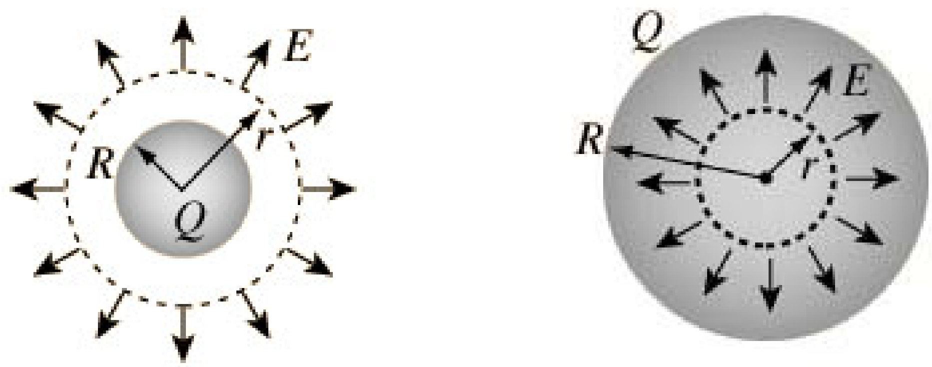


Figura 1

   c. Utilice la ley de Ampere (para el caso de campos estacionarios) para calcular el campo magnético $\mathrm{B}(\mathrm{r})$ fuera de un conductor infinito de corriente I; véase la Figura 2.

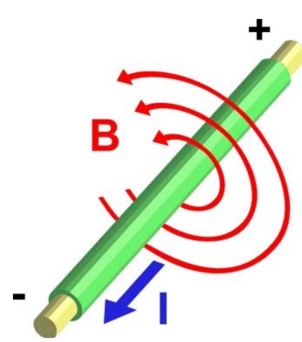
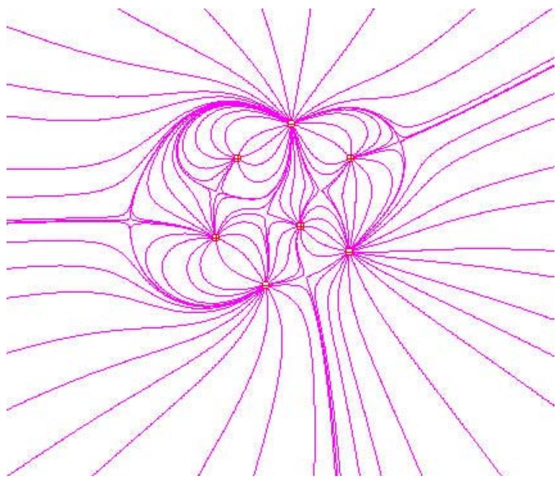


Figura 2

Ayuda: Del cálculo tenemos que para un campo vectorial F se cumplen los teoremas integrales de Gauss y Stokes, respectivamente:

$$\int_V (\nabla \circ \mathbf{F})\, \mathrm{d}V = \int_S \mathbf{F} \circ \mathrm{d}\mathbf{A}\ , \qquad \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \circ \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_L \mathbf{F} \circ \mathrm{d}\mathbf{l}$$

2. Los campos eléctricos $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y magnéticos $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ pueden ser escritos en términos de los potenciales escalar "electrostático" $\varphi(\mathbf{r},t)$ y vectorial magnético $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$.



a. Escriba la relación existente entre los potenciales electromagnéticos y los campos.

b. Utilizando la ley de Ampere demuestre que el potencial vectorial magnético satisface la ecuación de onda vectorial inhomogénea, en sistemas de unidades gaussiano:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\ ,$$

si se impone la condición de Lorentz

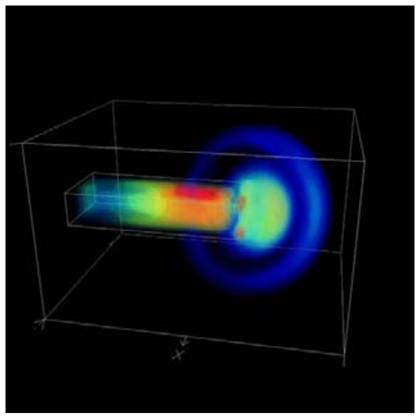
$$\nabla \circ \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0\,.$$

Recuerde que $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \circ \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F},$ siendo $\mathbf{F}$ un campo vectorial cualquiera. Puede utilizar el sistema de unidades que guste.

c. Demuestre, a partir de la ley de gauss para el campo eléctrico, que el potencial $\varphi(\mathbf{r},t)$ satisface la ecuación de onda escalar inhomogénea.

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho\,.$$

3. En presencia de los campos eléctricos $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y magnéticos $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ al igual que de densidades de corriente eléctrica J , el Teorema de Poynting establece una ley de conservación de energía electromagnética.



Considere un sistema de corrientes y campos electromagnéticos. La tasa a la cual la energía del campo es transferida a las corrientes está dada por

$$\int_V \mathbf{E}\circ\mathbf{J}\,\mathrm{d}V\,,$$

Donde V es un volumen que contienen a las corrientes.

a. Utilizando la ley de Ampere, la identidad vectorial

$$\nabla\circ(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\circ(\nabla\times\mathbf{F}) - \mathbf{F}\circ(\nabla\times\mathbf{G})\,,$$

y la ley de Faraday, muestre que en un volumen arbitrario se satisface el Teorema de Poynting

$$-\mathbf{E}\circ\mathbf{J} = \nabla\circ\mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t}\,;$$

donde

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,, \qquad u = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2)\,.$$

Utilice el sistema de unidades que prefiera para mostrar el resultado general requerido. Denotamos aquí, por ejemplo,

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{E} \circ \mathbf{E}.$$

b. Interprete cada uno de los términos del Teorema de Poynting.

INSTRUCCIONES:

- El aspirante deberá seleccionar dos problemas de los tres propuestos.
- Resolver cada problema en hojas separadas por una sola cara
- Escribir el nombre en cada una de ellas.

FÍSICA CUÁNTICA

1. Para luz incidente sobre una superficie metálica, el voltaje de corte ("stopping potencial" en inglés) es de 3.2V. Cuando se usa una segunda fuente de luz, cuya longitud de onda es el doble de la primera, el voltaje de corte cae a 0.8V.

   Conociendo que el voltaje de corte es dada por $V_\lambda = \frac{hc}{e\lambda} - \frac{W}{e}$, donde W es el potencial de trabajo Del metal ("work function" en inglés), calcula

   a. la longitud de onda de la primera fuente de luz
   b. el potencial de trabajo y la frecuencia mínima para la eyección de fotoelectrones
   c. Explique conceptualmente el efecto fotoeléctrico.

2. Considere un oscilador,
   a. Use el principio de incertidumbre para demostrar que el nivel mínimo (estado de base) tiene energía $h\, w/2$.

   Considere ahora el potencial $V(x) = \begin{Bmatrix} 0 & 0<x<a \\ \infty & x<0\, o\, x>a \end{Bmatrix}$

   b. Estime las energías del estado base y primer nivel excitado si la partícula se trata de (i) un electrón en un pozo con una anchura a = 10^{-10} m. y (ii) de una esfera metálica de 1 g en un pozo con una anchura a=10 cm.

   c. ¿Son importantes los efectos cuánticos en estos dos sistemas? ¿Para qué anchura del pozo se convierte el sistema (ii) en un sistema cuántico?

3. Considera un sistema cuyo estado y dos observables son dados por

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad 1.$$

   a. ¿Cuál es la probabilidad que una medición de A en tiempo t resulta en e l valor -1?
   b. Si primero se mide B y luego se mide A inmediatamente después, determine la probabilidad de encontrar un valor de 0 para B y un valor de 1 para A.

c. Si se hace el inverso, primero midiendo A e inmediatamente después midiendo B, ¿cuál es la probabilidad de encontrar un valor de 1 para A y o para B?
d. ¿Por qué las probabilidades para (b) y (c) no son iguales?