

Mecánica Clásica

aceves@astrocen.unam.mx

Tarea # 5

1. **Ecuación de Hamilton-Jacobi.** La ecuación de Hamilton-Jacobi, una ecuación diferencial parcial (EDP) de primer-orden no-lineal, está dada por

$$H(\mathbf{q}, \nabla_{\mathbf{q}} S, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

donde $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ es el vector que determina los n -grados de libertad de un sistema, y el momento canónico $\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{q}} S$; nótese que el momento puede ser considerado como un *operador* ($\mathbf{p} \rightarrow \nabla_{\mathbf{q}}$) al igual que en mecánica cuántica.

- a) En un toque de genialidad, Schrödinger arriba a su famosa ecuación del mundo cuántico mediante la postulación de

$$S = -i\hbar \ln \psi,$$

donde ψ es la conocida “función de onda”. Encuentre la ecuación de Schrödinger a partir de la de Hamilton-Jacobi; considere el caso uni-dimensional.

- b) Resuelva la ecuación de HJ para el caso de un oscilador armónico tri-dimensional, con Hamiltoniano:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$$

Utilice el método de separación de variables para esta EDP, y encuentre las constantes de separación.

2. **Función principal de Hamilton.** La función principal de Hamilton, o también llamada Acción, está definida –en una dimensión– como

$$S = \int_{t_0}^t L(z, \dot{z}, t) dt'.$$

Encuentre esta función para una partícula de masa m que se mueve verticalmente en un campo gravitacional uniforme de constante g , mediante la integración directa del Lagrangiano de la partícula a lo largo de la trayectoria vertical real que une los extremos.

El resultado a obtener es:

$$S(z, t; z_0, t_0) = \frac{m}{2} \frac{(z - z_0)^2}{t - t_0} - \frac{1}{2} mg(z + z_0)(t - t_0) - \frac{1}{24} mg^2(t - t_0)^3.$$

Gráfique la acción a distintos puntos z y tiempos t . Recuerde que el movimiento (momento) de la partícula es perpendicular a S .

3. **Péndulo Esférico.** Obtenga las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un péndulo esférico; i.e., una masa puntual m suspendida por una varilla rígida inponderable de longitud l ; véase Figura 1.

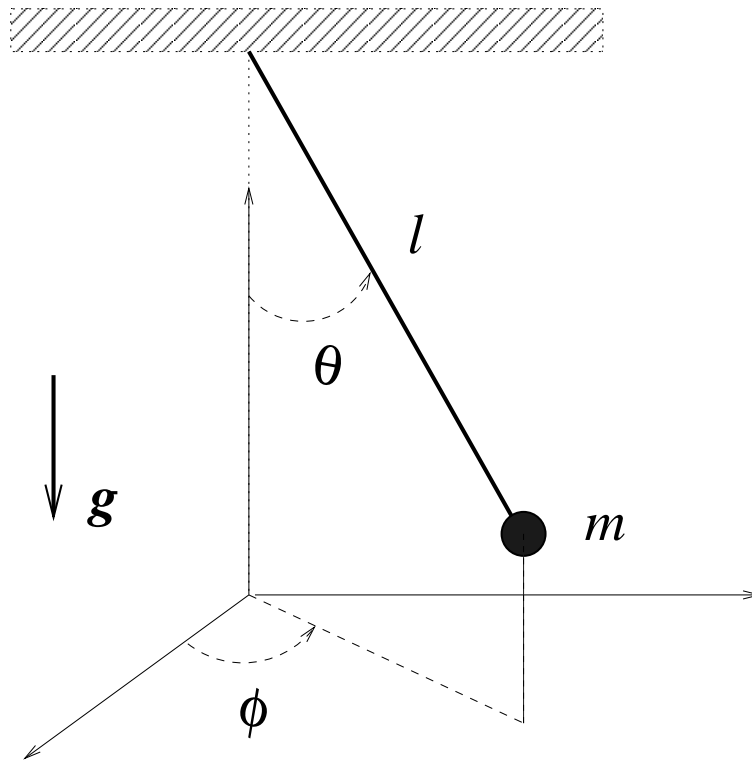


FIGURA 1 Péndulo Esférico