Mecánica Clásica

aceves@astrosen.unam.mx

Tarea # 2

1. **Análisis dimensional.** Resuelva los siguientes problemas relacionados con el análisis dimensional y el establecimiento de escalas asociadas a sistemas físicos.

   a) Una perturbación acústica se propaga en un gas con densidad uniforme ρ, de escala de tamaño R, y con una presión interna P. ¿Cuál es una escala de velocidad de propagación de la onda acústica? ¿De que orden sería tal velocidad en condiciones atmosféricas normales?

   b) Existe evidencia física de que el universo en gran escala se está expandiendo, y que la velocidad V de expansión es proporcional a la distancia r: *i.e.* $V = H_0 r$. Observacionalmente se tiene la constante de Hubble es $H_0 \approx 100\,\mathrm{km\,s^{-1}Mpc^{-1}}$ [$1\mathrm{Mpc} \approx 3 \times 10^{24}\,\mathrm{cm}$]. ¿Qué escala de tiempo, en años, para el universo se sigue de la ley de Hubble?
   La expansión del universo está regida por la relatividad general, cuyas constantes fundamentales son G y c. ¿Cómo sería una escala de densidad del universo, ρ_u, construida a partir de H_0, G y c? ¿Cuál su valor numérico en $\mathrm{gm/cm^3}$? ¿Cómo se compara ρ_u con la densidad del ser humano, del sistema planetario, o de nuestra galaxia? Esto debe servir de argumento del porqué ninguno de estos sistemas se ven afectados por la expansión del universo.

   c) El átomo más sencillo es el de Hidrógeno con una masa dada m (que es esencialmente la del protón), y una carga eléctrica q. La dinámica de tal átomo está dictada por la mecánica cuántica donde la constante $\hbar$ juega un papel fundamental. Encuentre una escala de longitud asociada al átomo de hidrógeno asi como una de energía. Evalue numéricamente tales números y cómo se compara, por ejemplo, la escala radial con la longitud de onda de la luz en el visible, y la escala de energía con la de ionización del átomo de hidrógeno.

   d) Se considera que a ciertas escalas la interacción gravitacional se "mezcla" con las interacciones del mundo cuántico. A partir de las constantes naturales de estos dos ámbitos de la naturaleza, encuentre una escala de longitud y de tiempo donde los efectos gravitacionales y cuánticos convivirían. Provea de valores numéricos para tales escalas de longitud de Planck, l_{P}, y tiempo de Planck, t_{P}.

2. **Cadena colgante en una mesa.** Una cadena de densidad uniforme ρ y longitud l se encuentra en reposo, con $2l/3$ partes horizontalmente sobre una mesa y $l/3$ colgando sobre un costado; véase Figura 1. La parte horizontal de la mesa tiene un coeficiente de fricción μ, mientras que la vertical no tiene. Demuestre que la velocidad del último eslabón al momento que deja la mesa está dada por:

$$v = \sqrt{\frac{4(2-\mu)}{9}gl}$$

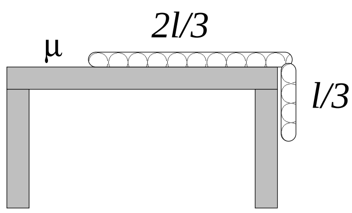

Figura 1

3. **Destrucción por fuerzas de marea.** En nuestra galaxia, y en otras, existen galaxias mucho más pequeñas conocidas como galaxias enanas que orbitan alrededor de ella. Durante su movimiento orbital las galaxias enanas son destruidas por fuerzas de marea; cosa similar le ocurren a los cometas; véase Figura 2. Considere una galaxia enana de radio R compuesta de "enjambre" de estrellas ligadas gravitacionalmente, de masa total m que cae radialmente hacia una galaxia masiva de masa M. Si la galaxia enana se encuentra a una distancia r, demuestre que ésta será destruida si se cumple, en primer orden, que:

$$\frac{2M}{r^3} > \frac{m}{R^3}$$

Figura 2 Cometa Shoemaker-Levy siendo desmembrado por la fuerza de marea ejercida por Júpiter.

4. **Teorema de Newton.** El Segundo Teorema de Newton, en una variante, establece que el campo gravitacional de un cascarón esférico de masa M y radio R atrae a una partícula externa de masa m como si toda la masa del cascarón estubiera concentrada en su centro; véase Figura 3. La demostración de este teorema por Newton le llevo unos 10 años, por no querer utilizar la herramienta del cálculo integral que estaba desarrollando en aquel entonces. Demuestre utilizando el cálculo, y en menos tiempo que Newton, que el teorema anterior es correcto.

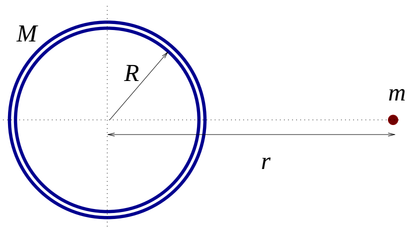

Figura 3

5. **Campo Gravitacional de Sistemas Aplanados.** Considere un modelo de disco aplanado (Fig. 4) para un sistema gravitacional dado en una primera aproximación (e.g. galaxia espiral, un asteroide). Se requiere encontrar el potencial para poder establecer la dinámica de una partícula alrededor de dicho objeto.

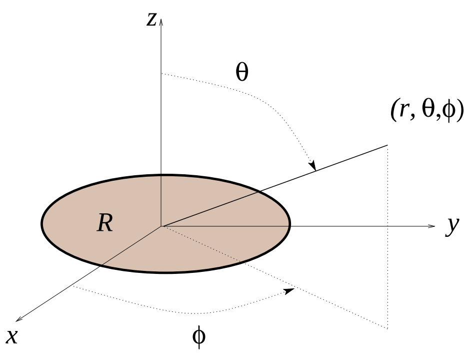

FIGURA 4

a) Calcule el potencial gravitacional φ, en el eje de simetría a una distancia z, de un disco de densidad superficial de masa $\sigma = M/\pi R^2$ constante.

b) El potencial gravitacional, fuera de regiones donde existe una distribución de masa ρ, satisface la ecuación de Laplace. Muestre que en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) la ecuación de Laplace tiene soluciones del tipo

$$\varphi(r,\theta,\phi) \sim \left[Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \right] P(\cos\theta)\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} m\phi}$$

donde (l, m) son constantes y $P(\cos\theta \equiv x)$ satisface la ecuación asociada de Legendre:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0\,.$$

¿Que tipo de constantes, reales o no-reales, son los números (l, m)? Justifique su respuesta.

c) Expanda el potencial encontrado en el inciso (a) para distancias $r > R$ hasta tercer orden. Este potencial debe coincidir con la solución general de la ecuación de Laplace cuando $\theta \to 0$. Utilice esta “condición de frontera” para encontrar la expresión de los primeros terminos de potencial $\varphi(r, \theta)$ fuera del eje de simetría.

6. **Programa Cómputacional.** Imprima el programa y anexelo cuando entregue su Tarea. Envié por correo eléctronico el programa fuente, con los comentarios que considere pertinentes para correrlo y ejecutarlo.

a) Escriba un programa `oscilador.f90` que resuelva la ecuación de movimiento de un oscilador armónico uni-dimensional $\ddot{x} = -\omega^2 x$, de masa unitaria, utilizando el algoritmo de **Euler** y el de **leap-frog**.

b) Resuelva el caso para las condiciones iniciales $x_0 = 1.0$ y $v_0 = 0$. Evolucione el oscilador por $t = 10\tau$, donde $\tau = 2\pi/\omega$ es el período natural del sistema.

c) ¿Para qué paso de tiempo, como fracción de τ, el error relativo en la energía del oscilador, entre la energía de la solución numérica y análitica, es menor al 1 %, y al 0.1 %? Esto en ambos integradores: **Euler** y **leap-frog**.

d) Gráfique dichos cálculos. En particular, gráfique $x = x(t)$, $v = v(t)$, y su espacio fase.