ELECTRODINAMICA CLASICA

Dr. Héctor Aceves
Instituto de Astronomía, UNAM
aceves@astrosen.unam.mx

Tarea # 5

1. **Línea cargada infinita.** En la figura 1 se muestra una línea cargada infinita. La intención de este problema es calcular el potencial eléctrico $\varphi(x)$ en un punto x cualquiera. La idea de este problema es calcular directamente el potencial, sin recurrir a la ley de Gauss para obtener el campo eléctrico y luego el potencial. El problema es más complicado de lo que aparece en primera instancia.

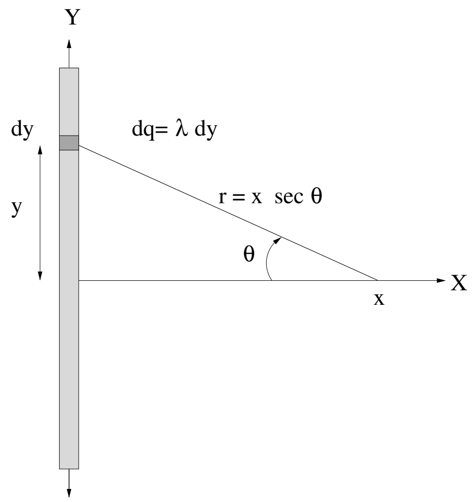

Figura 1. Línea cargada infinita con densidad lineal λ.

2. **Potencial eléctrico sin simetría azimutal.** Este problema consta de dos partes. Primero, considérese una cascarón esférico no-conductor de radio $r = a$ que se le ha colocado una densidad superficial de carga tal que produce una potencial

$$\varphi(a, \theta, \phi) = V_0 \sin\theta \cos\phi \ .$$

Determine el potencial tanto dentro como fuera del mismo y exprese su resultado en términos de armónicos esféricos. En segundo lugar, ahora suponga que el cascarón anterior es colocado dentro de otro pero conductor de radio $r = b$ y que se encuentra a un potencial cero. Determine el potencial electrostático en la región comprendida entre los dos cascarones. Exprese, de nuevo, su resultado en términos de armónicos esféricos.

3. Guía de onda rectangular excitada. La ecuación que satisface el campo eléctrico transversal E_y estacionario dentro una guía de onda rectangular metálica que es exitado por una punta eléctrica es

$$\nabla^2 E_y + \omega_0^2 E_y = \mathrm{i}\,\omega J_y(\mathbf{r})$$

donde $J_y(\mathbf{r})$ representa la densidad de corriente eléctrica que la punta prueba suministra para exitar los campos dentro de la guía metálica; la cual es colocada en un punto del eje-Z. En esta ecuación se ha supuesto que la onda viaja en la dirección z, con variaciones temporales armónicas del tipo $\exp(\mathrm{i}\omega t)$. Las condiciones de frontera que se imponen para los modos transversales (TM) son:

$$E_y(x=0,y,z) = E_y(x=a,y,z) = 0\ , \qquad E_z(x,0,z) = E_z(x,b,z) = 0$$

donde se tienen los límites $x \in [0,a]$, $y \in [0,b]$, y $z \in [-\infty,+\infty]$. Así pues, el campo eléctrico transversal se puede obtener utilizando

$$E_y(x,y,z) = \mathrm{i}\,\omega \int\int\int J_y(x',y',z')\, G(x,y,z;x',y',z')\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}y'\, \mathrm{d}z'\ .$$

El problema consiste en encontrar la función de Green para este problema; nótese que en puntos distintos a donde está la punta exitadora se satisface la ecuación homogénea. Demuestre que la función de Green esta dada por

$$G(x,y;x',y') = \frac{2\mathrm{i}}{ab}\sum_{m=1}\sum_{n=1}\frac{1}{\omega_z}\sin\frac{m\pi}{a}x'\,\cos\frac{n\pi}{b}y'\,\sin\frac{m\pi}{a}x\,\cos\frac{n\pi}{b}y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_z|z-z'|}\ (z<z', z>z')$$

donde

$$\omega_z = \begin{cases} \sqrt{\omega_0^2 - (\omega_x^2+\omega_y^2)} & \omega_0^2 > (\omega_x^2+\omega_y^2) \\ \\ -\mathrm{i}\sqrt{(\omega_x^2+\omega_y^2) - \omega_0^2} & \omega_0^2 < (\omega_x^2+\omega_y^2) \end{cases} .$$

Se observa de la misma forma de la función de Green que cuando $\omega_0^2 > (\omega_x^2+\omega_y^2)$ los modos se propagan en la dirección Z, mientras que en caso contrario éstos no se propagan y representan modos evanecentes; de hecho decaen exponencialmente.

4. Placa con densidad de carga. Una placa conductora rectangular tiene una densidad de carga $\rho(\mathbf{x}) = \rho(x,y)$ con sus bordes a potencial φ cero excepto en un lado, donde es $\varphi = V_0$; véase la Fig. 2. Demuestre que el potencial dentro de la misma está dado por

$$\varphi(x,y) = -4\pi\int_0^a\int_0^b G(x,y;x',y')\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

donde la función de Green esta dada por

$$G(x,y;x',y') = \begin{cases} \sum_{m=1} B_m \sinh\frac{m\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{a}x & y<y' \\ \\ \sum_{m=1}\left[C_m\cosh\frac{m\pi}{a}y + \left(V_0 - C_m\cosh\frac{m\pi b}{a}\right)\frac{\sinh\frac{m\pi}{a}y}{\sinh\frac{m\pi b}{a}}\right]\sin\frac{m\pi}{a}x & y>y' \end{cases} ;$$

donde los coeficientes están dados por

$$B_m \equiv B_m(x',y') = \frac{\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1}{\beta_2\alpha_1-\alpha_2\beta_1} \quad \text{y} \quad C_m \equiv C_m(x',y') = \frac{\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1}{\beta_2\alpha_1-\alpha_2\beta_1}$$

siendo:

$$\alpha_1 = \sinh\frac{m\pi}{a}y' \ , \quad \beta_1 = \cosh\frac{m\pi}{a}y' - \coth\frac{m\pi b}{a}\sinh\frac{m\pi}{a}y' \ , \quad \gamma_1 = V_0\frac{\sinh\frac{m\pi}{a}y'}{\sinh\frac{m\pi b}{a}}$$

$$\alpha_2 = \cosh\frac{m\pi}{a}y' \ , \quad \beta_2 = \sinh\frac{m\pi}{a}y' - \coth\frac{m\pi b}{a}\cosh\frac{m\pi}{a}y' \ , \quad \gamma_2 = \frac{a}{m\pi} - V_0\frac{\cosh\frac{m\pi}{a}y'}{\sinh\frac{m\pi}{a}}$$

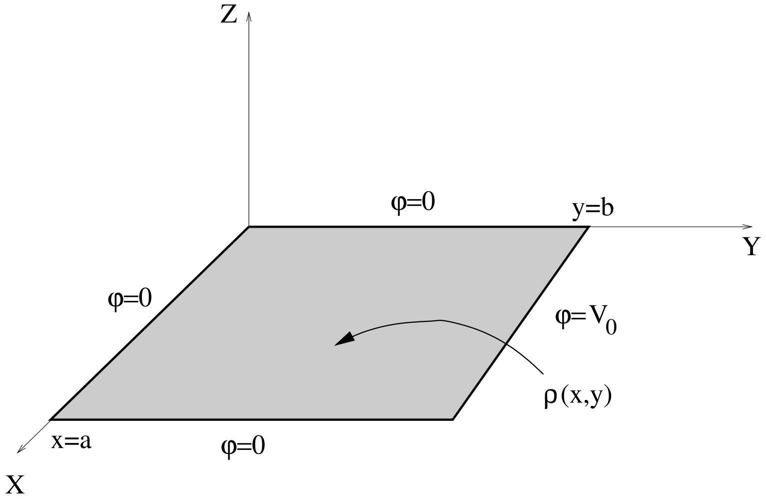

Figura 2. Placa conductora con una densidad de carga $\rho(x,y)$.